

## Basis teoretis dari metode grid yang ditumpangkan

Sudirman T.P. Lumbangaol<sup>1</sup>✉, Yoel Octobe Purba<sup>2</sup>, Juliaster Marbun<sup>3</sup>, Ruben Cornelius Siagian<sup>4</sup>,  
Kevin William Andri Siahaan<sup>5</sup>

<sup>1,2,5</sup>Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar, Indonesia

<sup>3</sup>Universitas HKBP Nommensen, Indonesia

<sup>4</sup>Universitas Negeri Medan, Indonesia

[dirmantogu@gmail.com](mailto:dirmantogu@gmail.com)<sup>1</sup>, [yoeloctobepurba@gmail.com](mailto:yoeloctobepurba@gmail.com)<sup>2</sup>, [juliaster.marbun@uhn.ac.id](mailto:juliaster.marbun@uhn.ac.id)<sup>3</sup>  
[rubensiagian775@gmail.com](mailto:rubensiagian775@gmail.com)<sup>4</sup>, [kevinsiahaan52@gmail.com](mailto:kevinsiahaan52@gmail.com)<sup>5</sup>

### Abstrak

Masalah pemodelan sifat anisotropik yang benar dari bahan komposit sampai hari ini tidak sepenuhnya terungkap. Ini memaksa para insinyur dan ilmuwan untuk menyederhanakan deskripsi parameter fisik dan mekanik untuk menentukan perilaku mekanik padatan yang dapat dideformasi. Ini terutama berlaku untuk viskositas. Akibatnya dalam kompleks analisis perangkat lunak elemen hingga, sifat-sifat ini dimodelkan secara turun-temurun fungsi yang sebanding dengan tensor elastisitas awal, yang dalam beberapa kasus bukan asumsi yang benar. Adapun untuk menghilangkan kekurangan tersebut berdasarkan metode elemen hingga, maka metode grid yang ditumpangkan diusulkan, yang memungkinkan untuk memodelkan sifat fisik dan mekanik, khususnya viskoelastik, dengan mempertimbangkan tingkat anisotropi. Metode ini memungkinkan untuk memecahkan sejumlah masalah dalam teori viskoelastisitas anisotropik, menghasilkan diperoleh hasil yang benar. Makalah ini menyajikan pembedaran teoretis untuk metode ini, yang didasarkan pada: pertimbangan total energi fungsional dari benda cacat, untuk masalah statis dan dinamis linier teori elastisitas dan viskoelastisitas. Pendekatan terhadap masalah ini menetapkan aturan untuk memperoleh parameter tegangan-regangan keadaan benda yang dapat dideformasi sesuai dengan kekhasan metode kisi-kisi yang ditumpangkan dan skenario yang mungkin diidentifikasi aplikasinya.

**Kata Kunci:** Metode grid, pemodelan sifat anisotropik, model sifat fisik dan mekanik, teori elastisitas dan viskoelastisitas.

### Abstract

*The problem of modeling the correct anisotropic properties of composite materials to date has not been fully revealed. This forced engineers and scientists to simplify the description of physical and mechanical parameters to determine the mechanical behavior of deformable solids. This is especially true for viscosity. As a result in complex finite element software analysis, these properties are modeled from generation to generation of functions that are proportional to the initial elasticity tensor, which in some cases is not a correct assumption. As for eliminating these shortcomings based on the finite element method, the superimposed grid method is proposed, which makes it possible to model physical and mechanical properties, especially viscoelastic, taking into account the degree of anisotropy. This method makes it possible to solve a number of problems in the theory of anisotropic viscoelasticity, yielding correct results. This paper presents a theoretical justification for this method, which is based on: consideration of the total functional energy of the deformed body, for linear static and dynamic problems of elasticity and viscoelasticity theory. This approach to this problem establishes the rules for obtaining the stress-strain parameters of the deformable state of the body according to the peculiarities of the superimposed grating method and the possible scenarios identified for its application.*

**Keywords:** Grid method, anisotropic property modeling, physical and mechanical properties model, theory of elasticity and viscoelasticity

✉Corresponding author : Sudirman T.P. Lumbangaol

Email : [dirmantogu@gmail.com](mailto:dirmantogu@gmail.com)

Jurnal Pendidikan, Sains Sosial, dan Agama

## PENDAHULUAN

Saat memodelkan perilaku mekanis elemen komposit struktur dan mesin, para insinyur dan ilmuwan akan menghadapi sejumlah masalah yang berkaitan dengan kebutuhan untuk memperhitungkan anisotropi fisik sifat-sifat komposit (Sari, 2019). Untuk kasus perilaku elastis mereka sudah cukup berkembang terkhusus dalam aparatus matematika, namun untuk sifat yang lebih kompleks seperti plastisitas, creep, viskoelastisitas, ada kekurangan metode umum pemodelan mereka (Widiastuti, 2018)

Adapun sejumlah situasi di mana kebutuhan untuk memperhitungkan tingkat keseluruhan dari anisotropi, misalnya, sifat viskoelastik yang perlu diperhatikan. Beberapa peneliti telah mengangkat masalah ini dan dengan perlunya menerapkan model viskoelastisitas anisotropik untuk memecahkan masalah praktis dan melakukan pernyataan masalah Fahmy, (2019);Amiri-Rad, Pastukhov, Govaert, & van Dommelen, (2019);Mizukami, Ikeda, & Ogi, (2019). Beberapa paper yang dituliskan para ilmuwan dan insinyur diatas telah membuktikan perlunya pemodelan anisotropik viskoelastisitas untuk masalah biomekanik. metode untuk menyelesaikan yang nonlinier model viskoelastik anisotropik adalah dengan menggambarkan perilaku mekanik komposit berserat. Adapun dengan menerapkan teori viskoelastisitas anisotropic adalah untuk memodelkan mekanisme membran biologis dan menyajikan solusi untuk kasus keadaan tegangan bidang Ai et al., (2020);Nguyen & Hwu, (2020). Peneliti juga telah menyelidiki perambatan gelombang pada pelat tipis viskoelastik isotropik transversal dalam penyelesaian eliptik masalah nilai batas, yang juga dirumuskan dalam bidang frekuensi-ruang dengan penggunaan elemen hingga prosedur Galerkin.

Penelitian ini menunjukkan penerapan fungsi Green untuk solusi anisotropik dari model bahan viskoelastik, dan juga para peneliti telah menerapkan metode batas untuk mempertimbangkan anisotropik benda datar viskoelastik dengan cacat. Telah dipresentasikan pula algoritma perbedaan hingga ruang-waktu untuk pemodelan tubuh isotropik transversal dengan sumbu vertikal simetri. Namun, tidak semua algoritma yang diusulkan dapat diterapkan bentuk geometris objek apa pun dan dimensi masalah (Irifiantina et al., 2017). Untuk memecahkan masalah ini kompleks perangkat lunak analisis elemen hingga, dan metode untuk memperhitungkan sifat viskoelastik anisotropik, yang disebut metode grid superimposed (MNS) akan diusulkan. Adapun Metode ini telah diuji pada berbagai model perhitungan, dan diterapkan untuk memecahkan masalah nyata dalam mekanika material komposit. paper ini akan mempertimbangkan aspek teoretis dari metode kisi-kisi yang ditumpangkan, yang memungkinkan tidak hanya menggunakan sebagai alat teknis, tetapi juga untuk menerapkan algoritma perhitungan yang tertutup dalam mekanisme deformasi benda anisotropik.

## METODE

Dalam menyederhanakan deskripsi parameter fisik dan mekanik untuk menentukan perilaku mekanik padatan yang dapat dideformasi. properti ini dimodelkan dari generasi ke generasi fungsi yang sebanding dengan tensor elastisitas awal, yang dalam beberapa kasus bukan asumsi yang benar untuk menghilangkan kekurangan ini berdasarkan metode elemen hingga Wibawa, (2018);Putra et al., (2020), maka metode grid yang ditumpangkan diusulkan, yang membuatnya mungkin untuk memodelkan sifat fisik dan mekanik, khususnya viskoelastik, dengan mempertimbangkan tingkat anisotropi masalah statis dan dinamis linier dari teori elastisitas dan viskoelastisitas. Pendekatan untuk masalah ini menetapkan aturan untuk memperoleh parameter tegangan-regangan dari keadaan benda yang dapat dideformasi sesuai dengan kekhasan metode kisi yang ditumpangkan dan kemungkinan skenario yang diidentifikasi untuk penerapannya.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### a. Prasyarat untuk pengembangan metode grid yang ditumpangkan

Bahan komposit yang diperkuat polimer (PACM) memiliki skema penguatan arah tertentu, jadi sifat mekaniknya tergantung pada arah beban yang diterapkan. Hasilnya adalah anisotropi sifat elastis dan viskoelastik, yang dinyatakan oleh hubungan tensor di komponen menurut jenisnya (Nurfajri et al., 2019).

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \sum_{kl} C_{ijkl}(t-\xi, T) \frac{d\varepsilon_{kl}}{d\xi} d\xi, \quad (1)$$

Dimana  $C_{ijkl}(t, T)$  adalah komponen yang bergantung pada waktu dan suhu dari tensor relaksasi bahan viskoelastik;  $\sigma_{ij}(t)$  adalah komponen tensor tegangan;  $\varepsilon_{kl}(t)$  komponen tensor deformasi (Zhu et al., 2020). Sedangkan untuk PACM dengan struktur tulangan ortogonal, sifat viskoelastiknya adalah ortotropik (Al-Shetwi et al., 2020). Kemudian hubungan fisik dalam persamaan (1) dalam notasi Voigt akan mengambil bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{33}(t) \\ \sigma_{23}(t) \\ \sigma_{13}(t) \\ \sigma_{12}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{22}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{33}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{23}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{13}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{12}(\xi)/d\xi \end{bmatrix} d\xi. \quad (2)$$

Untuk bahan polimer yang sering dianggap adalah isotropik, sedangkan hubungan dalam persamaan (2), akan disederhanakan sehingga hanya 2 komponen yang tidak diketahui yang tersisa dalam tensor relaksasi. Maka dimungkinkan untuk memilih lapisan

dan bagian deviator dari tensor relaksasi, yang sangat berguna karena untuk bahan polimer viskositas karakteristik bagian yang berubah bentuk (penyimpang) sambil mempertahankan bagian volume (lapisan) relatif konstan dari waktu ke waktu. Kemudian bentuk tensor dari hubungan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}(t) = \int_0^t 2\hat{G}(t-\xi) \frac{d\hat{e}(\xi)}{d\xi} + \hat{I} \int_0^t K(t-\xi) \frac{d\Delta(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (3)$$

Dimana untuk  $\hat{\sigma}(t)$  adalah tegangan tensor peringkat kedua;  $\hat{G}(t)$ ,  $K(t)$  adalah geser dan bagian volume dari tensor relaksasi, biasanya tergantung pada suhu; deviator dan deformasi lapisan dan unit tensor. Selanjutnya akan ditulis dalam bentuk;

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \Delta & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \Delta & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \Delta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Perlu dicatat bahwa seringkali hubungan dalam persamaan (3) diambil sebagai dasar dan untuk kasus-kasus bahan anisotropik, karena saat ini tidak ada algoritma universal untuk memecahkan masalah viskoelastisitas anisotropik dengan mendefinisikan hubungan dalam persamaan (2). Di sisi lain, dengan adanya kemungkinan untuk menghadirkan modul relaksasi dengan deret Prony eksponensial, maka ketergantungan waktunya dapat digeneralisasi untuk komponen tensor relaksasi hubungan fisik (1) dalam kasus tiga dimensi, yaitu;

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl} + \sum_m \mu_{ijkl}^m \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ijkl}^m}\right), \quad (5)$$

Dimana  $C_{ijkl}$  adalah koefisien tensor kekakuan elastis;  $m$  adalah koefisien tensor kekakuan elastisitas;  $\mu_{ijkl}^m$  koefisien viskositas untuk anggota seri Proni; dan  $\tau_{ijkl}^m$  adalah waktu relaksasi di anggota seri Proni (Nguyen & Hwu, 2020a). Selanjutnya dengan menggunakan metode yang dikenal untuk memformat ulang hubungan fisik dalam persamaan (1), dapat direpresentasikan secara setara dalam bentuk;

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{kl} \left\{ C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t \sum_m \left[ k_{ijkl}^m \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_{ijkl}^m}\right) \right] \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi \right\}, \quad (6)$$

Dimana untuk  $k_{ijkl}^m = \frac{\mu_{ijkl}^m}{\tau_{ijkl}^m}$  adalah koefisien viskositas umum untuk anggota deret

Proni, dan akhirnya kita mendapatkan;

$$C_{ijkl}\left(t, \left(T_{ref}\right)_{ijkl}\right) = C_{ijkl}\left(\left(\alpha_T\right)_{ijkl} t, T\right), \quad (7)$$

Dimana  $\left(T_{ref}\right)_{ijkl}$  adalah suhu relatif, umumnya berbeda untuk arah yang berbeda;  $\left(\alpha_T\right)_{ijkl}$  adalah fungsi geser, dalam kasus umum dari jenis yang berbeda atau dengan koefisien yang berbeda untuk yang berbeda arah. Jika kita mempertimbangkan bahan di

mana sifat viskoelastik sebanding dengan elastis, maka beberapa koefisien dari relasi dalam persamaan (7) dan (8) akan disederhanakan ;

$$\begin{cases} a_{ijkl}^m = a_m; \\ \tau_{ijkl}^m = \tau_m; \\ (T_{ref})_{ijkl} = T_{ref}; \\ (\alpha_T)_{ijkl} = \alpha_T. \end{cases} \quad (8)$$

Seperti yang disebutkan sebelumnya, untuk kasus bahan viskoelastik isotropic, relasi dalam bentuk tensor memiliki bentuk berdasarkan persamaan (3) Bagian geser dan volume dari tensor relaksasi dalam persamaan (3) juga diwakili oleh deret Proni, yaitu;

$$\begin{cases} K(t) = K_0 \left[ a_\infty^k + \sum_{n_K} a_{n_K}^K \exp\left(-\frac{t}{\tau_{n_K}^K}\right) \right]; \\ \hat{G}(t) = \hat{G}_0 \left[ a_\infty^G + \sum_{n_G} a_{n_G}^G \exp\left(-\frac{t}{\tau_{n_G}^G}\right) \right], \end{cases} \quad (9)$$

Adapun Bentuk sifat viskoelastik ini juga berlaku untuk software ANSYS® Mechanical. Tetapi terlepas dari kenyataan bahwa sifat viskoelastik material dalam produk perangkat lunak ini adalah isotropik, karakteristik elastis masih dapat diatur secara anisotropis.

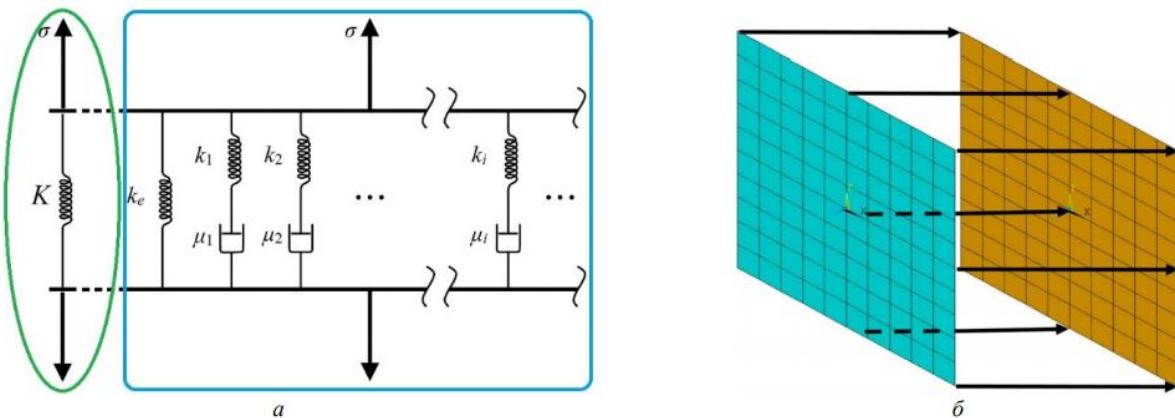
#### a. Inti dari metode grid yang ditumpangkan

Kami telah menyajikan model reologi bahan viskoelastik dalam kasus satu dimensi dalam bentuk model persamaan Maxwell umum, seperti yang ditunjukkan pada persegi panjang biru pada Gambar. 1. Jika secara paralel untuk menggabungkan model seperti itu dengan analog dari model elastis yang ditandai dengan garis hijau, maka kami akan menerima model yang baru dalam konteks reologi gabungan (Gonano et al., 2015).

Dalam model ini, dua elemen elastis dengan kekakuan  $K$  dan ke dapat diganti secara ekivalen dengan satu elemen elastis dengan kekakuan  $K_e = K + k_e$ . Selanjutnya dengan analogi kombinasi model reologi untuk metode elemen hingga adalah metode grid yang ditumpangkan ditawarkan. Ini terdiri dari fakta bahwa dua diciptakan di tempat volume identik yang sama. Kemudian mereka secara berurutan dibagi menjadi kisi elemen hingga - masing-masing volume dengan propertinya. Karena algoritma untuk membuat kisi elemen hingga (CE) bekerja dengan cara yang sama untuk volume identik dengan pengaturan partisi elemen hingga yang sama, maka node dan elemen kedua grid spasial akan bertepatan dengan satu sama lain (Lee et al., 2019).

Langkah selanjutnya adalah menggabungkan semua node. Jadi, node yang diperoleh sesuai dengan dua kelompok elemen secara bersamaan, jumlahnya setelah penggabungan menjadi dua kali lebih kecil, dan jumlah elemen tetap sama. Dengan pemikiran ini, model elemen hingga gabungan akan menjadi berubah bentuk bersama-sama, dan masing-masing lapisan grid CE akan memberikan kontribusinya sendiri terhadap potensi energi. Dia berarti bahwa unsur-unsur dari setiap kelompok bahan akan berada dalam keadaan

tegangan individu di bidang gerakan yang sama. Medan tegangan tensor yang dihasilkan dalam model adalah jumlah tegangan tensor untuk setiap kelompok elemen



**Gambar 1.** Ilustrasi metode grid yang ditumpangkan: a - model reologi gabungan; dan  $\sigma$  - penggabungan grid yang cocok

Adapun Teknik ini dibangun dengan menggunakan paket perangkat lunak analisis elemen hingga ANSYS® ; Academic Research Mechanical, yang dirancang khusus untuk melakukan analisis elemen hingga mekanika padat yang dapat dideformasi, dan didistribusikan secara gratis oleh ANSYS, Inc. melalui Internet di situs resmi mereka.

*b. Formulasi metode grid yang ditumpangkan untuk masalah elastisitas*

Adapun Pada bagian ini akan dibuat pembuktian teoritis untuk masalah elastisitas statik linier, yang kemudian dapat digeneralisasikan ke fenomena lain dari mekanika padatan anisotropic yang dapat dideformasi.

Dengan membiarkan hubungan geometris dalam ruang Euclidean tiga dimensi dengan koordinat  $x_1, x_2, x_3$  menjadi tercatat sebagai :

$$\varepsilon = Du \quad (10)$$

Dimana  $\varepsilon$  adalah vektor regangan dengan komponen yang identik dengan komponen vektor regangan pada persamaan (2);  $u$  adalah vektor perpindahan;  $D$  adalah matriks operator diferensial dengan koefisien yang memastikan pemenuhan hubungan Cauchy (Matveev, 2016).

Adapun hubungan fisis untuk kasus benda elastis linier disederhanakan menjadi bentuk:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (11)$$

Dimana  $\sigma$  adalah vektor tegangan dengan komponen yang identik dengan komponen vektor tegangan pada (2);  $C$  adalah matriks elastis dengan komponen identik dengan komponen tensor kekakuan elastis di rasio (5). Maka fungsi Lagrange untuk benda elastis tiga dimensi akan dituliskan sebagai berikut:

$$W = \int_V \frac{1}{2} u^T (D^T C D) u dV - \int_V f^T u dV - \int_{S_u} p^T u dS, \quad (12)$$

Dimana  $W$  adalah energi potensial deformasi elastis;  $V$  adalah volume yang ditempati oleh benda elastis;  $S_u$  adalah bagian dari permukaan luar tubuh di mana tidak ada deformasi;  $f$  adalah vektor beban volumetrik;  $p$  adalah vektor beban permukaan.

Diketahui bahwa untuk menemukan keadaan stres-regangan yang sebenarnya, maka fungsi ini harus memperkecil. Perangkat lunak elemen hingga modern didasarkan pada prosedur minimalisasi kompleks. Menurut prosedur pengambilan sampel, vector perpindahan direpresentasikan sebagai superposisi linier produk perpindahan nodal dari model elemen hingga dan fungsi orthogonal bentuk;

$$u = nU, \quad (13)$$

Dimana  $n$  adalah vektor bentuk fungsi;  $U$  adalah matriks perpindahan nodal. Selanjutnya dengan Menerapkan persamaan proyeksi ke persamaan fungsional kita peroleh:

$$W = \int_V \frac{1}{2} u^T (n^T D^T C D n) u dV - \int_V (f^T n) u dV - \int_{S_u} (p^T n) u dS, \quad (14)$$

Pertimbangkan M grid elemen hingga, yang masing-masing sesuai dengan fungsi energi elastisnya sendiri akan terdeformasi;

$$W_m = \int_{V_m} \frac{1}{2} U_m^T (n^T D^T C_m D n) u_m dV_m - \int_{V_m} (f_m^T n) u_m dV - \int_{S_{um}} (p_m^T n) u_m dS, \quad (15)$$

Dimana  $m = 1..M$ ;  $V_m$  adalah volume body yang sesuai dengan kisi elemen hingga ke- $m$ ;  $S_{um}$  adalah bagian dari permukaan luar kisi elemen hingga ke- $m$  yang sesuai dari tubuh, yang tidak ada deformasi;  $W_m$  adalah energi potensial deformasi elastis dari kisi elemen hingga ke- $m$ ;  $U_m$  adalah matriks perpindahan nodal dari kisi elemen hingga ke- $m$ ;  $f_m$  adalah vektor beban volume kisi elemen hingga ke- $m$ ;  $p_m$  adalah vektor beban permukaan kisi elemen hingga ke- $m$ ;  $C_m$  adalah matriks elastis dari kisi elemen hingga ke- $m$ . Biarkan  $M$  sesuai dengan jumlah komponen signifikan dalam matriks kekakuan  $C$ . Tulis matriks  $C_m$  untuk aturan berikut;

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \dots \quad C_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa, pertama, matriks seperti itu, dengan mempertimbangkan kepositifan komponennya, adalah positif didefinisikan dan, kedua, aturan dipenuhi untuk mereka;

$$\sum_{M=1}^M C_m = C. \quad (17)$$

Selanjutnya mari kita asumsikan bahwa semua M kisi elemen hingga menempati volume yang sama yang dibatasi oleh satu dan permukaan yang sama, yang analog dengan konstruksi kisi-kisi semacam itu berdasarkan satu volume dalam paket perangkat lunak analisis elemen hingga. Ini akan menyebabkan penyederhanaan dalam sistem, yaitu;

$$V_m = V; S_{um} = S_u. \quad (18)$$

Jika kita merumuskan persyaratan bahwa perpindahan simpul dari semua kisi elemen hingga adalah sama, yang analog dengan penggabungan node grid dalam kompleks perangkat lunak analisis elemen hingga, ditulis dalam sebagai berikut;

$$U_1 = U_2 = \dots = U_m = \dots = U_m = U. \quad (19)$$

Selanjutnya dengan ringkas semua ekspresi dalam sistem, dan dengan mempertimbangkan persyaratan berdasarkan persamaan yang telah disebutkan diatas;

$$\sum_{m=1}^M W_m = \int_V \frac{1}{2} U^T \left( n^T D^T \left\{ \sum_{m=1}^M C_m \right\} D n \right) U dV - \int_V \left( \left\{ \sum_{m=1}^M f_m^T \right\} n \right) U dV - \int_{S_u} \left( \left\{ \sum_{m=1}^M p_m^T \right\} n \right) U dS. \quad (20)$$

Mempertimbangkan aturan dan dengan asumsi bahwa;

$$\sum_{m=1}^M f_m = f; \sum_{m=1}^M p_m = p, \quad (21)$$

kita sampai pada ekspresi;

$$\sum_{m=1}^M W_m = \int_V \frac{1}{2} U^T \left( n^T D^T C D n \right) U dV - \int_V (f^T n) U dV - \int_{S_u} (p^T n) U dS, \quad (22)$$

Dan dengan dilakukanya perbandingan, maka kita peroleh;

$$\sum_{m=1}^M W_m = W \quad (23)$$

Kesetaraan ini berarti bahwa jumlah energi potensial dari semua kisi elemen hingga dengan simpul yang menyatu dan sifat fisik yang dijelaskan oleh matriks  $C_m$  setara dengan energi satu elemen hingga kisi-kisi dengan sifat fisik yang dijelaskan oleh matriks  $C$ . Dengan demikian akan meminimalkan energi body yang tercermin oleh model elemen hingga gabungan juga setara dengan meminimalkan energi tubuh, yang dipantulkan oleh kisi elemen hingga tunggal. Menurut hubungan persamaan geometris, deformasi setiap kisi elemen hingga adalah identik dan ditentukan oleh perpindahan sendi, yaitu  $\varepsilon_m = \varepsilon$ , dan stres pada hubungan fisik didefinisikan sebagai berikut;

$$\sigma_m = C_m \varepsilon. \quad (24)$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan semua ekspresi dalam system, maka akan didapatkan;

$$\sum_{m=1}^M \sigma_m = \left\{ \sum_{m=1}^M C_m \right\} \varepsilon. \quad (25)$$

Selanjutnya juga dengan melakukan perbandingan hubungan persamaan, maka kita akan peroleh;

$$\sigma_m = \sum_{m=1}^M \sigma_m \quad (26)$$

Jadi, jumlah keadaan tegangan di semua kisi elemen hingga gabungan adalah ekuivalen keadaan tegangan dalam kisi elemen hingga tunggal, dan berdasarkan permukaan dan volume yang dihasilkan beban juga ditentukan oleh jumlah beban tersebut pada masing-masing grid elemen hingga

c. Perumusan metode grid yang ditumpangkan untuk masalah nonstasioner

Fungsionalitas energi total benda elastis dengan mempertimbangkan gaya inersia dan gaya disipasi internal akan dituliskan dalam bentuk;

$$W = \int_V \frac{1}{2} \dot{u}^T (D^T C D) u dV - \int_V \frac{1}{2} \dot{u}^T M \ddot{u} dV - \int_V u^T B u dV - \int_V f^T u dV - \int_{S_u} p^T u dS, \quad (27)$$

Dimana  $M = \rho I$  adalah matriks kepadatan;  $B = bI$  adalah matriks disipasi;  $I$  adalah matriks tunggal;  $\rho$  adalah kepadatan;  $b$  adalah koefisien disipasi;  $\dot{u}$  adalah vektor kecepatan;  $\ddot{u}$  adalah vektor percepatan. Sangat mudah untuk menunjukkan bahwa untuk anggota yang sesuai dengan gaya inersia dan disipatif, adalah mungkin untuk membuat penilaian yang sama seperti untuk komponen struktur yang sesuai dengan gaya elastis Petrović et al., (2018);Yamauchi et al., (2017). Kemudian matriks densitas dan disipasi yang dihasilkan untuk model elemen hingga gabungan akan dituliskan sebagai jumlah dari matriks yang sama dari setiap model grid;

$$\sum_{m=1}^M M_m = M, \sum_{m=1}^M B_m = B. \quad (28)$$

Dalam kasus perilaku viskoelastik linier material, ketergantungan dengan analogi rasio, berdasarkan persamaan (1) akan ditulis sebagai;

$$\sigma = \int_0^t C(t-\xi) \frac{d}{d\xi} \varepsilon d\xi. \quad (29)$$

Selanjutnya dengan Membandingkan ekspresi, kita dapat menulis energi potensial dari benda viskoelastik sebagai berikut:

$$W = \int_V \frac{1}{2} u^T D^T \int_0^t C(t-\xi) D \frac{d}{d\xi} u d\xi dV - \int_{S_u} p^T u dS. \quad (30)$$

Ketergantungan integral dalam hubungan ini mengarah pada kebutuhan untuk solusi numerik persamaan integral dalam bentuk prosedur iteratif. Setiap iterasi memecahkan masalah yang sama masalah statis normal, tetapi dengan matriks C yang sesuai dengan titik waktu tertentu. Sehingga jelas bahwa komplikasi seperti itu tidak dapat mempengaruhi kemungkinan penjumlahan matriks relaksasi bahan dalam model elemen hingga gabungan, yaitu tidak akan melanggar aturan, yang dalam hal ini akan terlihat seperti ini;

$$\sum_{m=1}^M C_m(t) = C(t). \quad (30)$$

Akibatnya, MOE secara teoritis akan masuk akal untuk memecahkan masalah teori viskoelastisitas.

### Diskusi hasil dan Penerapannya

Hasil yang diperoleh dalam paper ini menunjukkan validitas teoritis dari metode grid yang ditumpangkan, yang juga memungkinkan untuk menerapkannya dengan solusi masalah stasioner linier dan non-stasioner mekanika benda padat anisotropik yang berubah bentuk. Yang paling tepat adalah penggunaannya untuk memecahkan masalah nonstasioner teori viskoelastisitas di mana tingkat anisotropi dari sifat-sifat turun-temurun bahan sama sekali tidak tergantung pada tingkat anisotropi sifat elastis, yang menyebabkan kompleksitas pemecahan masalah dan mengarah pada penggunaan asumsi yang tidak selalu sehat secara fisik (Papa et al., 2020).

Selain itu, dimungkinkan untuk mengembangkan teknologi ini untuk mengurangi perkiraan waktu dalam memecahkan masalah mekanika benda anisotropik, bahkan dengan algoritma universal yang sudah ada. MOE yang diusulkan dapat diimplementasikan baik pada tahap antarmuka pengguna dan diintegrasikan ke dalam algoritma elemen hingga, yang akan menyederhanakan penggunaannya dalam praktik rekayasa. Ini ditegaskan oleh pemberian yang diberikan dalam pekerjaan. Perlu dicatat, bagaimanapun, bahwa skema di atas berlaku untuk masalah linier mekanika padat, yang berubah bentuk. Untuk

menerapkan metode grid yang ditumpangkan untuk menyelesaikan masalah nonlinier, maka diperlukan: modifikasi dan pembuktian tambahan.

## KESIMPULAN

Metode grid yang ditumpangkan, yang awalnya dibangun untuk kompleksitas perangkat lunak analisis elemen hingga untuk memperluas kemampuannya dalam pemodelan viskoelastisitas anisotropik bahan, tidak hanya secara praktis tetapi juga secara teoritis. Ini memungkinkan kita untuk membicarakannya sebagai modernisasi metode elemen hingga, yang dalam beberapa kasus sangat menyederhanakan algoritma untuk memecahkan masalah elemen hingga, terutama dalam kasus di mana mengatur matriks relaksasi dari bahan viskoelastik atau merayap sehingga masing-masing komponennya, diungkapkan oleh fungsi turun-temurun, umumnya independen dari orang lain. Dengan demikian, kebaruan ilmiah yang terbukti dan nilai praktis dari metode ini, yang dapat diperluas ketika diterapkan pada pemodelan sifat fisik dan mekanik material lainnya selama: perhitungan elemen hingga.

## Daftar Pustaka

- Ai, Z. Y., Zhao, Y. Z., & Liu, W. J. (2020). Fractional derivative modeling for axisymmetric consolidation of multilayered cross-anisotropic viscoelastic porous media. *Computers & Mathematics with Applications*, 79(5), 1321–1334. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.08.033>
- Al-Shetwi, A. Q., Hannan, M. A., Jern, K. P., Mansur, M., & Mahlia, T. M. I. (2020). Grid-connected renewable energy sources: Review of the recent integration requirements and control methods. *Journal of Cleaner Production*, 253, 119831. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.119831>
- Amiri-Rad, A., Pastukhov, L. V., Govaert, L. E., & van Dommelen, J. A. W. (2019). An anisotropic viscoelastic-viscoplastic model for short-fiber composites. *Mechanics of Materials*, 137, 103141. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103141>
- Fahmy, M. A. (2019). Modeling and Optimization of Anisotropic Viscoelastic Porous Structures Using CQBEM and Moving Asymptotes Algorithm. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 44(2), 1671–1684. <https://doi.org/10.1007/s13369-018-3652-x>
- Gonano, C. A., Zich, R. E., & Mussetta, M. (2015). Definition for polarization P and magnetization M fully consistent with Maxwell's equations. *Progress In Electromagnetics Research B*, 64, 83–101.
- Irviantina, S., Sirait, P., Chandra, R., & Tono, L. (2017). Kajian Algoritma Upgraded Artificial Bee Colony dalam Pencarian Solusi Square Jigsaw Puzzle. *Jurnal SIFO Mikroskil*, 18(1), 11–20.
- Lee, J. C.-W., Weigandt, K. M., Kelley, E. G., & Rogers, S. A. (2019). Structure-Property

Relationships via Recovery Rheology in Viscoelastic Materials. *Physical Review Letters*, 122(24), 248003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.248003>

Matveev, A. D. (2016). Multigrid finite element method in stress analysis of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 158(1), 012067. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012067>

Mizukami, K., Ikeda, T., & Ogi, K. (2019). Measurement of velocity and attenuation of ultrasonic guided wave for real-time estimation of cure-dependent anisotropic viscoelastic properties of carbon fiber-reinforced plastics. *Ultrasonics*, 99, 105952. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2019.105952>

Nguyen, V. T., & Hwu, C. (2020a). Boundary element method for contact between multiple rigid punches and anisotropic viscoelastic foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 118, 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.001>

Nguyen, V. T., & Hwu, C. (2020b). Time-stepping method for frictional contact of anisotropic viscoelastic solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 184, 105836. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105836>

Nurfajri, N., Arwizet, K., Jasman, J., & Arafat, A. (2019). Analisis Kekuatan Tarik Komposit Serabut Kelapa dan Ijuk dengan Perlakuan Alkali (NaOH). *Ranah Research: Journal of Multidisciplinary Research and Development*, 1(4), 791–797.

Papa, I., Russo, P., Astarita, A., Viscusi, A., Perna, A. S., Carrino, L., & Lopresto, V. (2020). Impact behaviour of a novel composite structure made of a polymer reinforced composite with a 3D printed metallic coating. *Composite Structures*, 245, 112346.

Petrović, N., Pjevalica, N., & Janda, Ž. (2018). Optimal choice of the number of even harmonics demodulated from the excitation current of a sensor for precise dc voltage component detection in low voltage distributive grid as a strategy for suppression of the systematic error due to the grid voltage fluctuation. *Zbornik Radova, Elektrotehnički Institut "Nikola Tesla"*, 28(28), 25–40.

Putra, A. D., Rohman, M., & Wahab, A. (2020). Analisis Desain Excavator Bucket Menggunakan Metode Elemen Hingga dengan Material Baja. *Vol*, 16, 4–7.

Sari, N. H. (2019). *Teknologi Papan Komposit Diperkuat Serat Kulit Jagung*. Deepublish.

Wibawa, L. A. N. (2018). Desain dan Analisis Kekuatan Rangka Tempat Sampah di Balai LAPAN Garut Menggunakan Metode Elemen Hingga. *TURBULEN Jurnal Teknik Mesin*, 1(2). <http://dx.doi.org/10.36767%2Fturbulen.v1i2.352>

Widiastuti, A. P. (2018). *Analisis Perbandingan Desain Struktur Perkerasan Lentur Menggunakan Metode Empiris Dan Metode Mekanistik Empiris Pada Ruas Jalan Legundi-Kanigoro-Planjan (Comparison Analysis Of Pavement Structure Design Using Empirical And Empirical-Mechanistic Method)*.

Yamauchi, Y., Uehara, T., Kijima, S., & Yamashita, M. (2017). Plane Formation by Synchronous Mobile Robots in the Three-Dimensional Euclidean Space. *Journal of the ACM*, 64(3), 1–43. <https://doi.org/10.1145/3060272>

Zhu, F., Pan, E., Qian, Z., & Luo, Z. (2020). Waves in a generally anisotropic viscoelastic

*Basis teoritis dari metode grid yang ditumpangkan - Sudirman T.P. Lumbangaol<sup>1</sup>✉, Yoel Octobe Purba<sup>2</sup>, Juliaster Marbun<sup>3</sup>, Ruben Cornelius Siagian<sup>4</sup>, Kevin William Andri Siahaan<sup>5</sup>*  
doi: [10.53565/pssa.v8i1.485](https://doi.org/10.53565/pssa.v8i1.485)

composite laminated bilayer: Impact of the imperfect interface from perfect to complete delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 202, 262-277.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.031>